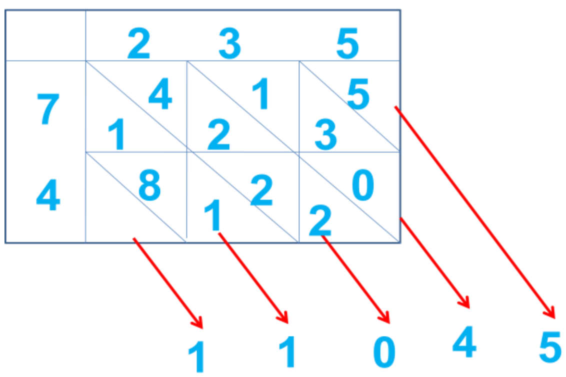
- ***الحضارة الإسلامية***

كانت انطلاقة المسلمين للعلم من قوله تعالى: إقرأ باسم ربك الذي خلق.... فلهم يعود الفضل في إحياء علوم الإغريق بعد أن طمست معالمه الدولة الرومانية التي لم يكن لها اهتماما بهذه العلوم.. فكانت تدفن العالم الإغريقي مع كتبه.. أو تحرق كتبه علنًا بحجة أنها تدعوا إلى الكفر.. في المقابل كان المسلمون يبادلون أسرى الرومان بالكتب الإغريقية ويرفعون الجزية مقابل هدية من الكتب.. ويضعون في بنود الصلح مع الرومان شرطًا بالسماح لهم بالتنقيب عن الكتب الإغريقية حتى في المقابر.. ومع هذا كله لم يحاول عالمًا واحدًا من علماء المسلمين أن ينسب لنفسه أي إنجاز أو كتابًا ليس له.. أخذ العلماء المسلمين من الحضارة الإنسانية أولا العلوم ذات الفائدة العملية لهم في حياتهم الخاصة والدينية والعامة مثل الرياضيات والفلك والطب.. كانت بدايتهم ترجمة كتب الإغريق.. رغم عظمة علم الإغريق ورقيهم الفلسفي فإنه لم يثني المسلمين عن نقدهم "بأدب".. فكانوا يقولون (قال الفاضل ابقراط)... فإذا وجدوا خطأ قالوا (وهذا الرأي عندنا خطأ وصحته كذا..)..

أول إنجاز قام به المسلمون هو تبديل نظام العد الإغريقي بالنظام العشري ذات المبدأ الموقعي.. لم تختلف عمليات الجمع والطرح عن ما هو متبع اليوم.. فنجد في كتاباتهم:

	جمع الأعداد
	3772 54876 3405
المحفوظات	1211
المجموع	62053

أما عمليات الضرب فكانت لهم طريقة خاصة موضحة في الجدول التالي.. فمثلا حاصل ضرب 235×74 هو العدد 11045:



أخذ المسلمون مفهوم الكسر a/b من الهنود.. ولكن كتب الهنود الكسر على الشكل $\begin{matrix}a\\ \mathrm{b}\end{matrix}$ .. كما أن العدد $c\frac{a}{b}$ كان يكتب عموديًا $\begin{matrix}c\\ \mathrm{a}\\ b\end{matrix}$ .. مثلا 4 ÷ 19 تعطي النتيجة النهائية $\begin{matrix}4\\ 3\\ 4\end{matrix}$ .. تعلم المسلمون هذه التقنية من الهنود لكنهم احتفظوا بإبدال الكسر بمجموع عدة كسور الوحدة (1/4 + 1/2 = 3/4) وكتبت الكسور على الشكل $\begin{matrix}1\\ 2\\ 1\\ 4\end{matrix}$ لكن هذا الشكل الأخير قد يعني أيضًا 1/4 ÷ 1/2 .. فهنا أضاف المسلمون للكسر خط الكسر $\frac{a}{\mathrm{b}}$ فاصبح شكل الكسر كما هو معروف اليوم.. حول العالم الكاشي الكسور العادية إلى كسور عشرية وأدخل العلامة العشرية فمثلا الكسر 1/2 أصبح بالكسر العشري:

1/2 = 5/10

1/2 = 0.5

بحث المسلمون في علاقات الأعداد والعمليات الحسابية بعضها ببعض.. وتوصلوا إلى قاعدات.. منها قاعدة حذف التسعة التي تنص على أن "إذا كان مجموع أرقام أي عدد أكبر من 9 فإن باقي قسمة هذا المجموع يساوي باقي قسمة العدد نفسه على 9".. مثلا:

$$98 \div 9 \;=\; 10 \text{ reminder } 8$$

$$9 \;+\; 8 \;=\; 17 > 9$$

$$17 \div 9 \;=\; 1 \text{ reminder } 8$$

قد يتبادر إلى أذهاننا سؤال هل هناك قاعدة لحذف الثلاثة أو الأربعة؟؟ هل هي نفس قاعدة حذف التسعة؟؟

درس العالم ثابت ابن قرة الأعداد المتحابة بعمق أكثر مما كانت عليه في عهد الإغريق.. "ففي مقدمة مذكراته حول الأعداد المتحابة يذكر ثابت ابن قرة أن فيثاغورس والفلاسفة القدماء من شيعته لجأوا إلى نوعين من الأعداد: الأعداد التامة والأعداد المتحابة. ويتابع ابن قرة قائلاً أن نيكوماخوس الجرشي قد أعطى قاعدة لتحديد الأعداد التامة دون أن يبرهنها بينما أعطى إقليدس القاعدة وبرهانها. وفيما يتعلق بالأعداد المتحابة فقط لاحظ ابن قرة بأنه لم يجد "أن واحدًا منهما ذكرها ولا صرف من عنايته إليها شيئًا"" (رشدي راشد 1989م)

فأوجد ابن قرة قاعدة لإيجاد الأعداد المتحابة وهي: إذا كانت

$$b = 3 \times 2^n - 1, \qquad k = 3 \times 2^{n-1} - 1, \qquad c = 9 \times 2^{2n-1} - 1$$

(حيث n عدد صحيح موجب أكبر من الواحد) وكانت b,k,c أعداد أولية فإن $a = 2^n c$, $h = 2^n bk$ هما عددان متحابان.. فمثلا في حالة n=2 فإن:

$$b = 3 \times 4 - 1 = 11, \qquad k = 3 \times 2 - 1 = 5, \qquad c = 9 \times 8 - 1 = 71$$

نجد أن b,k,c أعداد أولية..إذًا $h = 4 \times 11 \times 5 = 220$, $a = 4 \times 71 = 284$ **عددان متحابان.. وفي حالة n=1 و n=3 لا يمكن تطبيق قاعدة ثابت ابن قرة (لماذا؟)..**

أثبت ابن قرة قاعدته للأعداد المتحابة.. وسنورد هنا الإثبات المقدم في كتاب (موجز تاريخ الرياضيات) للمؤلفين هاشم الطيّار ويحي سعيد:

من تعريف الأعداد المتحابة نقول أن a,h عددان متحابان إذا كان مجموع قواسم العدد h (ماعدا h) هو العدد a ومجموع قواسم العدد a (ماعدا a) هو العدد h.. سنبدأ بإثبات أن مجموع قواسم العدد h هو العدد a:

قواسم العدد h هي:

$$h: 1,2,2^2, \dots, 2^n, b, 2b, 2^2b, \dots, 2^nb, k, 2k, 2^2k, \dots, 2^nk, bk, 2bk, 2^2bk, \dots, 2^{n-1}bk$$

فيكون مجموع قواسم العدد h هو:

$$sum(h) = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n + b + 2b + 2^2b + \dots + 2^nb + k + 2k + 2^2k + \cdots + 2^nk + bk + 2bk + 2^2bk + \cdots + 2^{n-1}bk$$

$$sum(h) = (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n)(1 + b + k + bk) - 2^nbk$$

نلاحظ أن $(1,2,2^2, \dots, 2^n)$ **هي متوالية هندسية مجموعها هو** $(2^{n+1} - 1)$ **إذًا:**

$$sum(h) = (2^{n+1} - 1)(1 + b + k + bk) - 2^nbk$$

$$sum(h) = (2^{n+1} - 1)(1 + b + k(1 + b)) - 2^nbk$$

$$sum(h) = (2^{n+1} - 1)(1 + b)(1 + k) - 2^nbk$$

بالتعويض في المجموع السابق عن $b = 3 \times 2^n - 1,\ k = 3 \times 2^{n-1} - 1$:

$$sum(h) = (2^{n+1} - 1)(1 + 3 \times 2^n - 1)(1 + 3 \times 2^{n-1} - 1) - 2^n(3 \times 2^n - 1)(3 \times 2^{n-1} - 1)$$

$$sum(h) = (2^{n+1} - 1)(9 \times 2^{2n-1}) - 2^n(3 \times 2^n - 1)(3 \times 2^{n-1} - 1)$$

$$sum(h) = (2^{n+1} - 1)(9 \times 2^{2n-1}) - 2^n(9 \times 2^{2n-1} - 3 \times 2^n - 3 \times 2^{n-1} + 1)$$

$$sum(h) = (2^{n+1} - 1)(9 \times 2^{2n-1}) - 2^n(9 \times 2^{2n-1} - 3 \times 2^{n-1}(2 + 1) + 1)$$

$$sum(h) = (2^{n+1} - 1)(9 \times 2^{2n-1}) - 2^n(9 \times 2^{2n-1} - 9 \times 2^{n-1} + 1)$$

$$sum(h) = 2^n[(2^{n+1} - 1)(9 \times 2^{n-1}) - (9 \times 2^{2n-1} - 9 \times 2^{n-1} + 1)]$$

$$sum(h) = 2^n[9 \times 2^{2n} - 9 \times 2^{n-1} - 9 \times 2^{2n-1} + 9 \times 2^{n-1} - 1]$$

$$sum(h) = 2^n[9 \times 2^{2n} - 9 \times 2^{2n-1} - 1]$$

$$sum(h) = 2^n[9 \times 2^{2n-1}(2 - 1) - 1]$$

$$sum(h) = 2^n[9 \times 2^{2n-1} - 1]$$

$$sum(h) = 2^n c = a$$

هكذا أثبتنا أن مجموع قواسم العدد h هو العدد a وبنفس الطريقة السابقة نثبت أن مجموع قواسم العدد a هو العدد h .. هكذا أثبت ثابت ابن قرة أن a,h عددان متحابان..

اهتم المسلمون بإيجاد الجذر التربيعي للأعداد.. فأوجد العالم الكرخي طريقة لإيجاد الجذر التربيعي للمربع الكامل فهو يورد مثال استخراج الجذر التربيعي للعدد 65536 ويقول بالنص (ما بين الأقواس تفسيره بالرموز الرياضية):

" قياس ذلك أن تطلب أعظم عدد مفرد (300,200,100,...) إذا ربع يكون مثل المطلوب جذره (65536) أو أقرب شيء إليه فنجد مائتين ($200^2 = 40000$).. الق مربع المائتين من خمسة وستين ألفا وخمسمائة وستة وثلاثين ($65536 - 40000 = 25536$).. ثم أطلب أعظم عدد في العشرات (30,20,10,...) إذا ضربته في مائتين مرتين وفي نفسه مرة واحدة كان ذلك مثل الباقي أو أقرب شيء إليه تجده خمسين.. إذا ضربت الخمسين في مائتين مرتين وفي نفسه مرة واحدة ($2 \times 200 \times 50 + 50 \times 50$) ارتفع منه اثنان وعشرون ألفا وخمسمائة ($2 \times 200 \times 50 + 50 \times 50 = 22500$) ألقها من الباقي يبقى ثلاثة آلاف وستة وثلاثون ($25536 - 22500 = 3036$).. أطلب أعظم عدد (3,2,1,...) إذا ضربته في مائتين وخمسين مرتين وفي نفسه مرة واحدة يكون مثل الباقي أو أقرب شيء إليه يكون ستة ($2 \times 250 \times 6 + 6 \times 6 = 3036$) فإن مائتين وستة وخمسين (256) هو الجذر المطلوب"

لو استعرضنا طريقة الكرخي في إيجاد الجذر التربيعي نجد أنه استخدم فكرة $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ فالمطلوب هو:

$$\sqrt{65536} = ??$$

فبدأ بالبحث عن أعظم عدد مفرد أي من المئات يكون مربعه مثل المطلوب جذره أو أقل منه فوجد العدد هو المائتين:

$$200^2 = 40000$$

قام بطرح مربع العدد المفرد من المطلوب جذره فكان الباقي الأول هو:

$$65536 - 40000 = 25536$$

ثم بحث عن أعظم عدد من العشرات يكون حاصل ضربه مرتين بالمائتين بالإضافة إلى حاصل ضربه بنفسه يكون مثل الباقي أو أقل منه:

$$2 \times 200 \times (?) + (?) \times (?) \leq 25536$$

فكان العدد هو الخمسين:

$$2 \times 200 \times 50 + 50 \times 50 = 22500$$

[[نلاحظ هنا أنه استخدم فكرة $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ فالخطوتين السابقتين تؤدي إلى:

$$200^2 + 2 \times 200 \times 50 + 50^2 = (200+50)^2$$

$$(200+50)^2 = 62500$$

$$[[\ (250)^2 = 62500$$

ثم قام بطرح 22500 من الباقي الأول فكان الباقي الثاني هو:

$$25536 - 22500 = 3036$$

ثم بحث عن أعظم عدد من الآحاد يكون ضربه مرتين بمائتين وخمسين بالإضافة إلى حاصل ضربه بنفسه يكون مثل الباقي الثاني أو أقل منه فكان العدد هو ستة:

الباقي الثاني $= 2 \times 250 \times 6 + 6 \times 6 = 3036$

فأوجد الجذر المطلوب وهو 256 .. [[نلاحظ هنا أيضا أنه استخدم فكرة $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ فالخطوتين السابقتين تؤدي إلى:

$$250^2 + 2 \times 250 \times 6 + 6^2 = (250+6)^2$$

$$(250+6)^2 = 65536$$

$$[[\ (256)^2 = 65536$$

لم يترك المسلمون الجانب الترويحي للحساب فتفننوا بالمربعات السحرية.. والمربع السحري هو مربع n×n يحتوي على الأعداد من 1 إلى n×n بحيث يكون مجموع الأعداد في الصف أو في العامود أو في القطر متساوي.. فمثلا مربع 4×4 :

13	8	12	1
3	10	6	15
2	11	7	14
16	5	9	4

حيث أن مجموع الأعداد في أي اتجاه هو العدد 34..

كان المسلمون أول من اكتشفوا طريقة حساب الخطأين (أو حساب الكفين).. فقد استعملوا هذه الطريقة في كثير من معاملاتهم لإيجاد عدد مجهول.. وقد وجدت في كتاب حساب قديم للعالم القلصادي الذي أفرد لها بابًا سماه باب العمل في الكفات.. فنورد هنا شرح الطريقة بنص القلصادي:

"تفرض المجهول ما شئت وتسميه المفروض الأول ثم تتصرف فيه بحسب السؤال فإن طابق فهو المطلوب وإن لم يطابق وكان الخطأ بالزيادة أو النقصان فهو الخطأ الأول.. ثم تفرض مجهولا آخر وهو المفروض الثاني فإن أخطأ حصل الخطأ الثاني.. بعد ذلك اضرب المفروض الأول في الخطأ الثاني وتسميه المحفوظ الأول.. والمفروض الثاني في الخطأ الأول وتسميه المحفوظ الثاني فإن كان الخطآن زائدين أو ناقصين فاقسم الفضل (الفرق) بين المحفوظين على الفضل بين الخطأين.. وإن اختلفا فمجموع المحفوظين على مجموع الخطأين ليخرج المجهول"..

ولمزيد من التوضيح نشرح الطريقة بمثال: ** أوجد العدد الذي إذا أضيف إليه ثلثاه وثلاثة كان الناتج 18 **

نبدأ بفرض أي قيمة للمجهول ولتكن x1=3 ثم نعوض عنه في المسألة إذا تحققت المسألة فالفرض x1 هو المجهول:

$$3 + 3\left(\frac{2}{3}\right) + 3 = 8$$

نلاحظ أن الفرض x1=3 لم يعطي النتيجة المطلوبة وهي 18..إذا لم تتحقق المسألة فنحسب الخطأ الأول وهو y1:

$$\mathrm{y1} = 18 - 8 = 10\ (+\mathrm{ve})$$

ثم نفرض قيمة أخرى للمجهول ولتكن x2=6 ثم نعوض بالفرض في المسألة:

$$6 + 6\left(\frac{2}{3}\right) + 3 = 13$$

لاحظ أيضًا أن الفرض x2=6 لم يعطي النتيجة المطلوبة وهي 18.. فنحسب الخطأ الثاني وهو y2:

$$\mathrm{y2} = 18 - 13 = 5\ (+\mathrm{ve})$$

ثم نحسب المحفوظ الأول هو عبارة عن حاصل ضرب الفرض الأول في الخطأ الثاني.. والمحفوظ الثاني هو عبارة عن حاصل ضرب الفرض الثاني في الخطأ الأول.. فإذا كان الخطأين لهما نفس الإشارة فإن:

$$\text{المجهول} = \frac{\text{المحفوظ الأول} - \text{المحفوظ الثاني}}{\text{الخطأ الأول} - \text{الخطأ الثاني}}$$

وإذا اختلفت إشارة الخطأين فإن:

$$\text{المجهول} = \frac{\text{المحفوظ الأول + المحفوظ الثاني}}{\text{الخطأ الأول + الخطأ الثاني}}$$

في المثال السابق الخطأين لهما نفس الإشارة.. إذًا المجهول هو:

$$unknown = \frac{(x2y1 - x1y2)}{(y1 - y2)}$$

$$= \frac{(60 - 15)}{(10 - 5)} = 9$$

(لماذا هذه الطريقة صحيحة لأي فرض يخطر على البال؟؟)

هناك طريقة أخرى استخدمها المسلمون في استخراج المجهولات وهي طريقة التحليل والتعاكس وتتلخص في العمل بالعكس أي بعكس ما أعطاه السائل " فإن ضعف فنصف وإن زاد فانقص أو ضرب فقسم أو جذر فربع أو عكس فاعكس مبتدئا من آخر السؤال ليخرج الجواب".. لو قيل أن عددًا ضرب في نفسه وزيد على الحاصل اثنان وضعف وزيد على الحاصل ثلاثة دراهم وقسم المجتمع على خمسة وضرب الخارج في عشرة حصل خمسون.. ما هو العدد؟

لإيجاد المجهول بطريقة التحليل والتعاكس نعمل بالعكس كالتالي:

وضرب الخارج في عشرة حصل خمسون.. $50 \div 10 = 5$

وقسم المجتمع على خمسة.. $5 \times 5 = 25$

وزيد على الحاصل ثلاثة دراهم.. $25 - 3 = 22$

وضعف.. $22 \div 2 = 11$

وزيد على الحاصل اثنان .. $11 - 2 = 9$

عددًا ضرب في نفسه.. $3 \times 3 = 9$ **.. إذًا العدد المجهول هو 3..**

ما قدمناه في هذا الباب هو جزء بسيط من تاريخ الحساب عبر العصور.. فالدراسات والأبحاث في الحساب من نظرية الأعداد والتحليل العددي وغيرها من الفروع مستمرة إلى يومنا هذا...